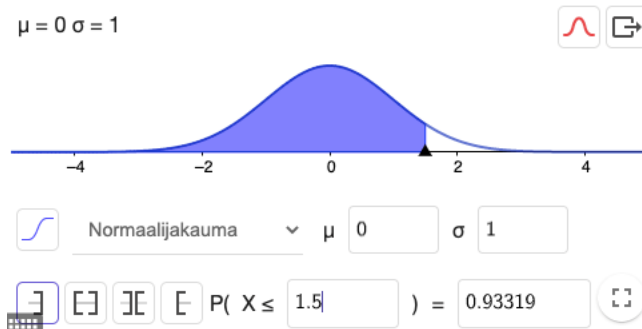


## 10.1

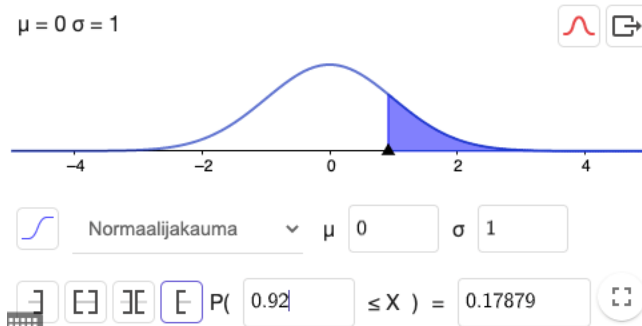
- a) Normitetun normaaliijakauman odotusarvo on 0 ja keskihajonta 1.  
Siis  $\mu = 0$  ja  $\sigma = 1$ .

Määritetään todennäköisyys GeoGebran todennäköisyyslaskurilla.



Saadaan  $P(Z \leq 1,5) \approx 0,93$ .

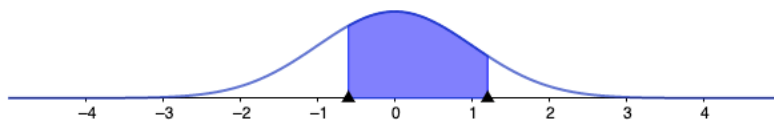
b)



Saadaan  $P(Z \geq 0,92) \approx 0,18$ .

c)

$$\mu = 0 \quad \sigma = 1$$



Normaalijakauma



$\mu$

0

$\sigma$

1



P(

-0.6

$\leq X \leq$

1.2

) =

0.61068



Saadaan  $P(-0,6 \leq Z \leq 1,2) \approx 0,61$ .

**Vastaus**

a) 0,93

b) 0,18

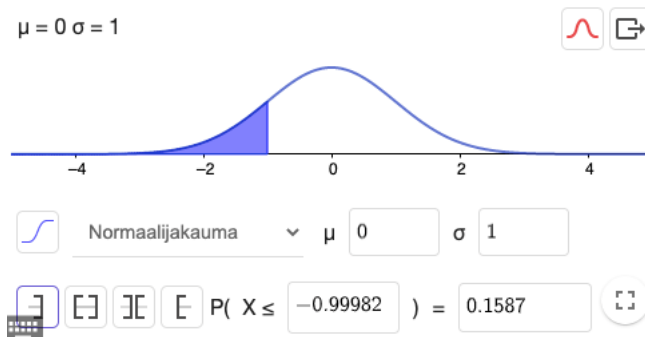
c) 0,61

## 10.2

a) Normitetun normaalijakauman odotusarvo on 0 ja keskihajonta 1.

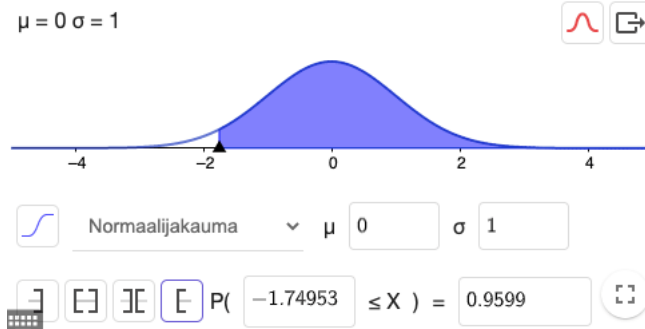
Siis  $\mu = 0$  ja  $\sigma = 1$ .

Määritetään arvo  $a$  GeoGebran todennäköisyyslaskurilla.



$P(Z \leq a) = 0,1587$ , kun  $a \approx -1,00$ .

b)



$P(Z \geq a) = 0,9599$ , kun  $a \approx -1,75$ .

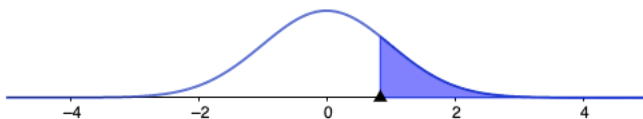
- c) Väritytty alue sijaitsee symmetrisesti odotusarvon 0 molemmin puolin.

Väritetyn alueen yläpuolinen osuus jakaumasta on

$$\frac{1 - 0,5991}{2} = 0,20045.$$

Määritetään sellainen arvo  $a$ , että  $P(Z \geq a) = 0,20045$ .

$\mu = 0 \sigma = 1$



Normaalijakauma

$\mu$

0

$\sigma$

1



P(

0.84001

$\leq X$

) =

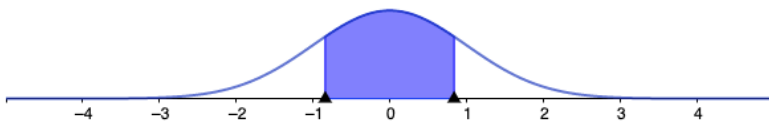
0.20045



$$P(Z \geq a) = 0,20045, \text{ kun } a \approx 0,84.$$

Tarkistetaan, toteutuuko annettu ehto.

$\mu = 0 \sigma = 1$



Normaalijakauma

$\mu$

0

$\sigma$

1



P(

-0.84

$\leq X \leq$

0.84

) =

0.5991



**Vastaus**

a) -1,00

b) -1,75

c) 0,84

## 10.3

- a) Satunnaismuuttujan  $X$  odotusarvo on 65 ja keskihajonta 10.

Siis  $\mu = 65$  ja  $\sigma = 10$ .

Lasketaan arvoa  $x = 80$  vastaava normitettu arvo.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{80 - 65}{10} = 1,5$$

Arvo  $x = 80$  poikkeaa odotusarvosta 1,5 keskihajonnan verran ylöspäin.

- b) Lasketaan arvoa  $x = 45$  vastaava normitettu arvo.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{45 - 65}{10} = -2$$

Arvo  $x = 45$  poikkeaa odotusarvosta 2 keskihajonnan verran alaspäin.

### Vastaus

- a) normitettu arvo 1,5; poikkeaa 1,5 keskihajonnan verran ylöspäin  
b) normitettu arvo -2, poikkeaa 2 keskihajonnan verran alaspäin

## 10.4

- a) Satunnaismuuttujan  $X$  odotusarvo on 45 ja keskihajonta 6.

Siis  $\mu = 45$  ja  $\sigma = 6$ .

Lasketaan arvoa  $x = 45$  vastaava normitettu arvo.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{45 - 45}{6} = 0$$

Oikea vaihtoehto on 3.

- b) Lasketaan arvoa  $x = 54$  vastaava normitettu arvo.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{54 - 45}{6} = 1,5$$

Oikea vaihtoehto on 5.

- c) Lasketaan arvoa  $x = 33$  vastaava normitettu arvo.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{33 - 45}{6} = -2$$

Oikea vaihtoehto on 1.

- d) Lasketaan arvoa  $x = 41$  vastaava normitettu arvo.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{41 - 45}{6} = -\frac{2}{3} \approx -0,67$$

Oikea vaihtoehto on 2.

**Vastaus**

**a)** 3

**b)** 5

**c)** 1

**d)** 2

## 10.5

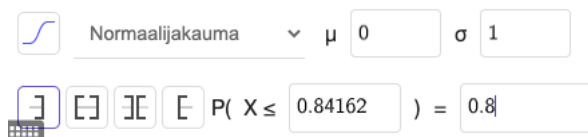
Tehtävänä on määrittää satunnaismuuttujan  $X$  keskihajonta  $\sigma$ , kun odotusarvo  $\mu = 28$ .

Olkoon arvoa  $x = 36$  vastaava normitettu arvo  $z$ .

Tulee olla  $P(X \leq 36) = P(Z \leq z) = 0,80$ .

Satunnaismuuttuja  $Z \sim N(0, 1)$ .

GeoGebra'n todennäköisyyslaskurilla saadaan, että  $P(Z \leq z) = 0,80$ , kun  $z \approx 0,84162$ .



Normaalijakauma  $\mu$  0  $\sigma$  1

$P(X \leq 0.84162) = 0.8$

Muodostetaan normitusyhtälö ja ratkaistaan  $\sigma$ .

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad z \approx 0,84162, \quad x = 36, \quad \mu = 28$$

$$0,84162 = \frac{36 - 28}{\sigma} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$\sigma \approx 9,5$$

**Vastaus**

9,5



## 10.6

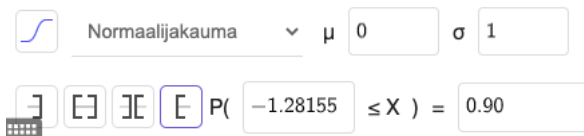
Tehtävänä on määrittää myslipussin massan  $X$  odotusarvo  $\mu$ , kun keskihajonta  $\sigma = 12$  (g).

Olkoon arvoa  $x = 400$  (g) vastaava normitettu arvo  $z$ .

Tulee olla  $P(X \geq 400) = P(Z \geq z) = 0,90$ .

Satunnaismuuttuja  $Z \sim N(0, 1)$ .

GeoGebran todennäköisyyslaskurilla saadaan, että  $P(Z \geq z) = 0,90$ , kun  $z \approx -1,28155$ .



Normaalijakauma  $\mu$  0  $\sigma$  1

$P(-1.28155 \leq X) = 0.90$

Muodostetaan normitusyhtälö ja ratkaistaan  $\mu$ .

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad z \approx -1,28155, \quad x = 400, \quad \sigma = 12$$

$$-1,28155 = \frac{400 - \mu}{12} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$\sigma \approx 415$$

Keskimääräiseksi massaksi on säädettävä 415 g.

**Vastaus**

415 g

## 10.7

Tehtävänä on määrittää vuorokauden keskilämpötilan  $X$  keskihajonta  $\sigma$ , kun odotusarvo  $\mu = 4,0$  (°C).

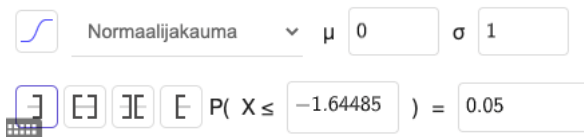
90 % vuorokautisista keskilämpötiloista on välillä  $2$  °C– $6$  °C, joten 5 % lämpötiloista on alle  $2$  °C ja 5 % lämpötiloista on yli  $6$  °C.

Olkoon arvoa  $x = 2$  (°C) vastaava normitettu arvo  $z$ .

Tulee olla  $P(X < 2) = P(Z < z) = 0,05$ .

Satunnaismuuttuja  $Z \sim N(0, 1)$ .

GeoGebran todennäköisyyslaskurilla saadaan, että  $P(Z < z) = 0,05$ , kun  $z \approx -1,64485$ .



Normaalijakauma    μ 0    σ 1

$P(X \leq -1.64485) = 0.05$

Muodostetaan normitusyhtälö ja ratkaistaan  $\sigma$ .

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \qquad z \approx -1,64485, \quad x = 2, \quad \mu = 4,0$$

$$-1,64485 = \frac{2 - 4,0}{\sigma} \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$\sigma \approx 1,2$$

Keskihajonta on  $1,2$  °C.

**Vastaus**

$1,2$  °C

## 10.8

Tehtävänä on määrittää 7-vuotiaiden poikien pituuden  $X$  odotusarvo  $\mu$  ja keskihajonta  $\sigma$ .

Puolet pojista ovat alle 125 cm pitkiä.

Normaalijakauman symmetrian perusteella pituuden odotusarvo  $\mu = 125$  (cm).

Pisimmät 7 % pojista ovat yli 132 cm pitkiä.

Olkoon arvoa  $x = 132$  (cm) vastaava normitettu arvo  $z$ .

Tulee olla  $P(X > 132) = P(Z > z) = 0,07$ .

Satunnaismuuttuja  $Z \sim N(0, 1)$ .

GeoGebran todennäköisyyslaskurilla saadaan, että  $P(Z > z) = 0,07$ , kun  $z \approx 1,47579$ .

 Normaalijakauma     $\mu$       $\sigma$

     $P($    $\leq X) =$

Muodostetaan normitusyhtälö ja ratkaistaan  $\sigma$ .

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$z \approx 1,47579, \quad x = 132, \quad \mu = 125$$

$$1,47579 = \frac{132 - 125}{\sigma}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$\sigma \approx 5$$

Keskihajonta on 5 cm.

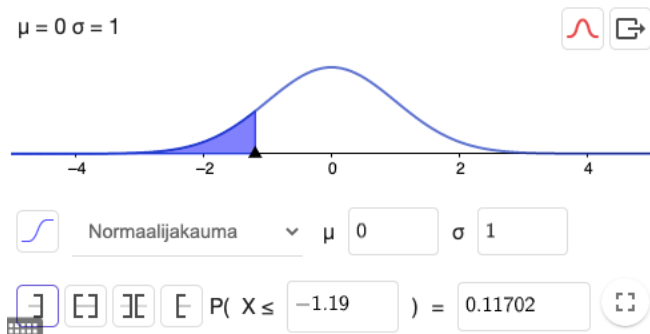
**Vastaus**

odotusarvo 125 cm, keskihajonta 5 cm

## 10.9

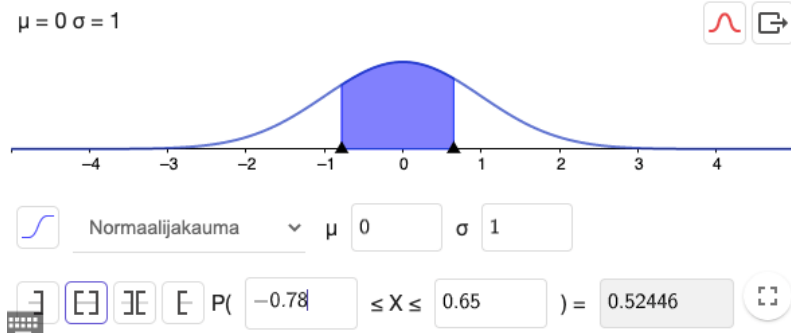
- a) Normitetun normaalijakauman odotusarvo on 0 ja keskihajonta 1.  
Siis  $\mu = 0$  ja  $\sigma = 1$ .

Määritetään todennäköisyys GeoGebran todennäköisyyslaskurilla.



Saadaan  $P(Z \leq -1,19) \approx 0,12$ .

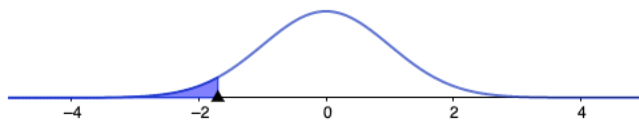
b)



Saadaan  $P(-0,78 \leq Z \leq 0,65) \approx 0,52$ .

c)

$$\mu = 0 \quad \sigma = 1$$



Normaalijakauma



$\mu$

0

$\sigma$

1



P( X ≤

-1.70

) =

0.04457



Saadaan  $P(Z \leq -1,70) \approx 0,04457$ .

Normaalijakauman symmetrian perusteella

$$P(Z \leq -1,70 \text{ tai } Z \geq 1,70) \approx 2 \cdot 0,04457 \approx 0,09.$$

### Vastaus

a) 0,12

b) 0,52

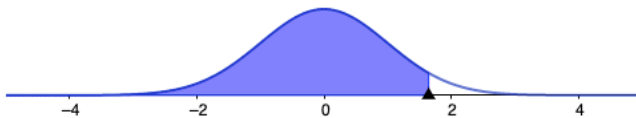
c) 0,09

## 10.10

- a) Normitetun normaaliijakauman odotusarvo on 0 ja keskihajonta 1.  
Siis  $\mu = 0$  ja  $\sigma = 1$ .

Määritetään arvo  $a$  GeoGebran todennäköisyyslaskurilla.

$$\mu = 0 \quad \sigma = 1$$



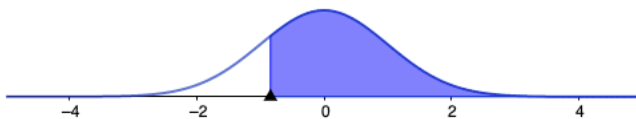
Normaalijakauma  $\mu$  0  $\sigma$  1

$P(X \leq 1.64485) = 0.95$

$$P(Z \leq a) = 0,95, \text{ kun } a \approx 1,64.$$

b)

$$\mu = 0 \quad \sigma = 1$$



Normaalijakauma  $\mu$  0  $\sigma$  1

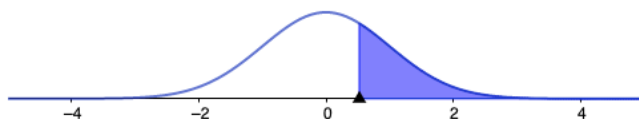
$P(-0.84162 \leq X) = 0.80$

$$P(Z \geq a) = 0,80, \text{ kun } a \approx -0,84.$$

- c) Väli  $-a \leq Z \leq a$  sijaitsee symmetrisesti odotusarvon 0 molemmin puolin. Välin yläpuolinen osuus jakaumasta on  $\frac{0,60}{2} = 0,30$ .

Määritetään sellainen arvo  $a$ , että  $P(Z > a) = 0,30$

$\mu = 0 \sigma = 1$



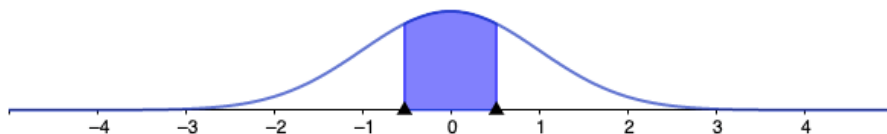
Normaalijakauma  $\mu$  0  $\sigma$  1

$P(0.5244 \leq X) = 0.30$

$P(Z > a) = 0,30$ , kun  $a \approx 0,52$ .

Tarkistetaan, toteutuuko annettu ehto.

$\mu = 0 \sigma = 1$



Normaalijakauma  $\mu$  0  $\sigma$  1

$P(-0.52 \leq X \leq 0.52) = 0.39694$

**Vastaus**



- a)**  $-1,64$
- b)**  $-0,84$
- c)**  $0,52$

## 10.11

- a) Satunnaismuuttujan  $X$  odotusarvo on 15 ja keskihajonta 2,5.

Siis  $\mu = 15$  ja  $\sigma = 2,5$ .

Lasketaan arvoa  $x = 20$  vastaava normitettu arvo.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{20 - 15}{2,5} = 2$$

Arvo  $x = 20$  poikkeaa odotusarvosta 2 keskihajonnan verran ylöspäin.

- b) Lasketaan arvoa  $x = 12,5$  vastaava normitettu arvo.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{12,5 - 15}{2,5} = -1$$

Arvo  $x = 12,5$  poikkeaa odotusarvosta 1 keskihajonnan verran alaspäin.

- c) Lasketaan arvoa  $x = 13$  vastaava normitettu arvo.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{13 - 15}{2,5} = -0,8$$

Arvo  $x = 13$  poikkeaa odotusarvosta 0,8 keskihajonnan verran alaspäin.

### Vastaus

- a) normitettu arvo 2; poikkeaa 2 keskihajonnan verran ylöspäin
- b) normitettu arvo -1, poikkeaa 1 keskihajonnan verran alaspäin
- c) normitettu arvo -0,8; poikkeaa 0,8 keskihajonnan verran alaspäin

## 10.12

- a) Satunnaismuuttujan  $X$  odotusarvo on 36 ja keskihajonta 4.

Siis  $\mu = 36$  ja  $\sigma = 4$ .

Lasketaan arvoa  $x = 48$  vastaava normitettu arvo.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{48 - 36}{4} = 3$$

Oikea vaihtoehto on 5.

- b) Lasketaan arvoa  $x = 42$  vastaava normitettu arvo.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{42 - 36}{4} = 1,5$$

Oikea vaihtoehto on 4.

- c) Lasketaan arvoa  $x = 33$  vastaava normitettu arvo.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{33 - 36}{4} = -0,75$$

Oikea vaihtoehto on 3.

- d) Lasketaan arvoa  $x = 30$  vastaava normitettu arvo.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{30 - 36}{4} = -1,5$$

Oikea vaihtoehto on 2.

### Vastaus

- a) 5

- b) 4**
- c) 3**
- d) 2**

## 10.13

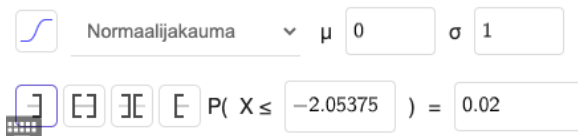
Tehtävänä on määrittää kahvipaketin massan  $X$  odotusarvo  $\mu$ , kun keskihajonta  $\sigma = 10$  (g).

Olkoon arvoa  $x = 500$  (g) vastaava normitettu arvo  $z$ .

Tulee olla  $P(X < 500) = P(Z < z) = 0,02$ .

Satunnaismuuttuja  $Z \sim N(0, 1)$ .

GeoGebran todennäköisyyslaskurilla saadaan, että  $P(Z < z) = 0,02$ , kun  $z \approx -2,05375$ .



Muodostetaan normitusyhtälö ja ratkaistaan  $\mu$ .

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \qquad z \approx -2,05375, \quad x = 500, \quad \sigma = 10$$

$$-2,05375 = \frac{500 - \mu}{10} \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$\sigma \approx 521$$

Odotusarvoksi pitäisi säätää 521 g.

**Vastaus**

521 g

## 10.14

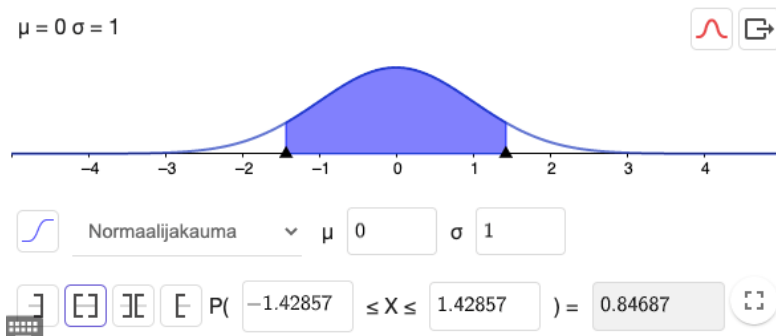
Teräslevyn paksuus  $X$  noudattaa normaalijakaumaa, jonka keskihajonta  $\sigma = 0,70$  (mm).

Sattumanvaraisesti valitun levyn paksuus poikkeaa keskiarvosta enintään 1,0 mm alas- tai ylöspäin.

Lasketaan poikkeamaa 1,0 mm vastaava normitettu arvo  $z$ .

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{1,0 \text{ mm}}{0,7 \text{ mm}} \approx 1,42857$$

Satunnaismuuttuja  $Z$  noudattaa normitettua normaalijakaumaa. Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys  $P(-1,42857 \leq Z \leq 1,42857)$ .



Levyn paksuus poikkeaa keskiarvosta vähemmän kuin 1,0 mm todennäköisyydellä 0,85.

**Vastaus**

0,85

## 10.15

Tehtävänä on määrittää autojen nopeuden  $X$  odotusarvo  $\mu$  ja keskihajonta  $\sigma$ .

30 % autoista ajoi alle 60 km/h.

$z_2$

Olkoon arvoa  $x = 60$  (km/h) vastaava normitettu arvo

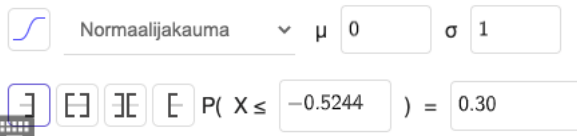
$$z_1 P(Z < z_1) = 0,30. \quad P(Z > z_2) = 0,80$$

$$z_1 \approx -0,5244. P(X < 60) = P(Z < z_1) = 0,30. Z \sim N(0,1).$$

Tulee olla

Satunnaismuuttuja

GeoGebran todennäköisyyslaskurilla saadaan, että  
, kun

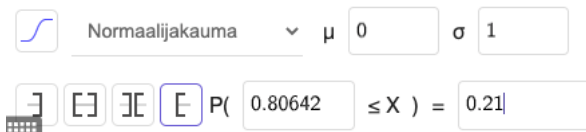


21 % autoista ajoi yli 80 km/h.

Olkoon arvoa  $x = 80$  (km/h) vastaava normitettu arvo .

Tulee olla  $P(X > 80) = P(Z > z_2) = 0,80$ .

GeoGebran todennäköisyyslaskurilla saadaan, että  
, kun  $z_2 \approx 0,80642$ .



Muodostetaan normitusyhtälöt ja ratkaistaan  $\mu$  ja  $\sigma$ .

$$\begin{cases} \frac{60 - \mu}{\sigma} = -0,5244 \\ \frac{80 - \mu}{\sigma} = 0,80642 \end{cases} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$\mu \approx 68 \text{ ja } \sigma \approx 15$$

Nopeuksien keskiarvo oli 68 km/h ja keskihajonta 15 km/h.

**Vastaus**

keskiarvo 68 km/h, keskihajonta 15 km/h



## 10.16

Tehtävänä on määrittää led-lampun käyttöiän  $X$  odotusarvo  $\mu$  ja keskihajonta  $\sigma$ .

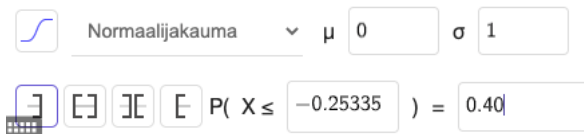
$$\frac{400}{1000} = 40 \% \text{ lampuista kesti enintään } 28\,000 \text{ tuntia.}$$

Olkoon arvoa  $x = 28\,000$  (h) vastaava normitettu arvo .

$$\text{Tulee olla } P(X \leq 28\,000) = P(Z \leq z_1) = 0,40.$$

Satunnaismuuttuja  $Z \sim N(0, 1)$ .

GeoGebran todennäköisyyslaskurilla saadaan, että  $P(Z \leq z_1) = 0,40$ , kun  $z_1 \approx -0,25335$ .



$$\frac{50}{1000} = 5 \% \text{ lampuista kesti ainakin } 34\,000 \text{ tuntia.}$$

Olkoon arvoa  $x = 34\,000$  (km/h) vastaava normitettu arvo  $z_2$ .

$$\text{Tulee olla } P(X \geq 34\,000) = P(Z \geq z_2) = 0,05.$$

GeoGebran todennäköisyyslaskurilla saadaan, että  $P(Z \geq z_2) = 0,05$ , kun  $z_2 \approx 1,64485$ .


 Normaalijakauma    μ 0    σ 1





 P( 1.64485 ≤ X ) = 0.05

Muodostetaan normitusyhtälöt ja ratkaistaan  $\mu$  ja  $\sigma$ .

$$\begin{cases} \frac{28\,000 - \mu}{\sigma} = -0,25335 \\ \frac{34\,000 - \mu}{\sigma} = 1,64485 \end{cases} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$\mu \approx 28\,800$  ja  $\sigma \approx 3160$

Lamppujen kestoiän odotusarvo on 28 800 h ja keskihajonta 3160 h.

### Vastaus

odotusarvo 28 800 h, keskihajonta 3160 h